foto

Profesor
Edson Curahua

GEOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

CLASE 04: CIRCUNFERENCIA I

DEFINICIÓN, ELEMENTOS

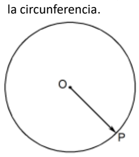
POSICIONES RELATIVAS

PROPIEDADES GENERALES

CIRCUNFERENCIA Y POLÍGONOS

DEFINICIONES

Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de otro punto fijo de dicho plano llamado CENTRO de la circunferencia.



Elementos:
1) Centro: O
2) Radio: $\overline{OP}$

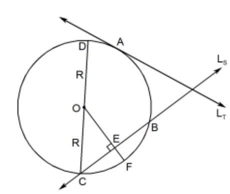
El interior de la circunferencia es el conjunto de puntos del plano cuya distancia al centro es menor que la longitud del radio.

El exterior de la circunferencia es el conjunto de puntos del plano cuya distancia al centro es mayor que la longitud del radio.

Un círculo es la unión de la circunferencia y su interior.

DEFINICIONES

Líneas relacionadas con la circunferencia



Cuerda: Segmento determinado por dos puntos de la circunferencia. Ejemplo: $\overline{BC}$

Diámetro: Cuerda que contiene al centro de la circunferencia. Ejemplo: $\overline{CD}$

Arco: Es parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de esta curva. Ejemplo: $\overset{\frown}{AB}$ (arco AB)

Flecha o sagita: Es un segmento que une el punto medio de una cuerda con el punto medio de su respectivo arco. Ejemplo: $\overline{EF}$

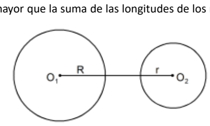
Recta secante: Recta que contiene a una cuerda de la circunferencia. Ejemplo: $\overleftrightarrow{L_S}$

Recta tangente: Recta en el plano de la circunferencia que tiene solo un punto común con la circunferencia Ejemplo: $\overleftrightarrow{L_T}$

POSICIONES RELATIVAS

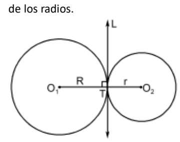
Posiciones relativas entre dos circunferencias coplanarias

01. Circunferencias exteriores: Cuando la distancia que une los centros de las 2 circunferencias es mayor que la suma de las longitudes de los radios.



$$O_1O_2 > R + r$$

02. Circunferencias tangentes exteriores: Cuando la distancia que une los centros de las 2 circunferencias es igual a la suma de las longitudes de los radios.

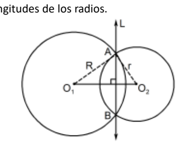


$$O_1O_2 = R + r$$

$\overleftrightarrow{L}$: Tangente común

POSICIONES RELATIVAS

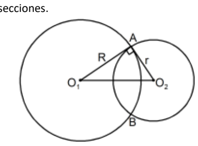
03. Circunferencias secantes: Cuando la distancia que une los centros de las dos circunferencias es menor que la suma y mayor que la diferencia de las longitudes de los radios.



$$R - r < O_1O_2 < R + r$$

$\overleftrightarrow{L}$: Secante común

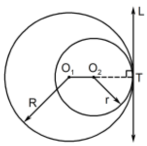
04. Circunferencias ortogonales: Son dos circunferencias secantes cuyos radios son perpendiculares en los puntos de las intersecciones.



$$O_1O_2 = \sqrt{R^2 + r^2}$$

POSICIONES RELATIVAS

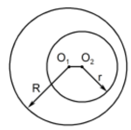
05. Circunferencias tangentes interiores: Cuando la distancia que une los centros de las 2 circunferencias es igual a la diferencia de las longitudes de los radios.



$O_1O_2 = R - r$

$\overleftrightarrow{L}$: Tangente común

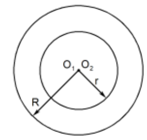
06. Circunferencias interiores: Cuando la distancia que une los centros de las 2 circunferencias es menor que la diferencia de las longitudes de los radios.



$O_1O_2 < R - r$

POSICIONES RELATIVAS

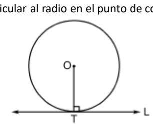
07. Circunferencias concéntricas: Cuando los centros de las 2 circunferencias coinciden.



$O_1O_2 = 0$

TEOREMAS FUNDAMENTALES

01. Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto.

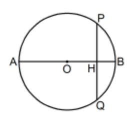


Si $\overleftrightarrow{L}$ es la recta tangente a la circunferencia de centro O en el punto T, entonces:

$\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{L}$

Nota:
Toda recta perpendicular al radio en un punto de la circunferencia es tangente a la circunferencia.

02. Un diámetro que biseca a una cuerda diferente a un diámetro es perpendicular a dicha cuerda.

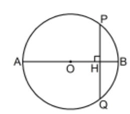


Si $\overline{AB}$ es diámetro y H es punto medio de la cuerda $\overline{PQ}$ ($\overline{PQ}$ no es diámetro), entonces:

$\overline{AB} \perp \overline{PQ}$

TEOREMAS FUNDAMENTALES

Nota 01:
Un diámetro perpendicular a una cuerda biseca a la cuerda.

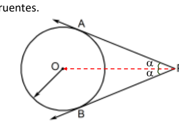


Si $\overline{AB}$ es diámetro y $\overline{AB} \perp \overline{PQ}$, entonces:

$m\widehat{PB} = m\widehat{BQ}$

Nota 02:
La mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia.

03. Los segmentos de recta tangentes trazadas desde un mismo punto a una circunferencia son congruentes.



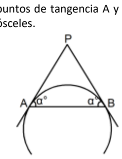
Si A y B son puntos de tangencia, entonces:

$PA = PB$

Nota 01:
$\overrightarrow{PO}$ es bisectriz del ángulo APB.

TEOREMAS FUNDAMENTALES

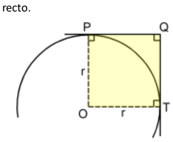
Nota 02:
Al unir los puntos de tangencia A y B se forma un triángulo isósceles.



$m\angle PAB = m\angle PBA$

Observaciones:

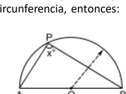
01. Tangentes a una circunferencia que forman ángulo recto.



$\square OPQT$: Cuadrado

TEOREMAS FUNDAMENTALES

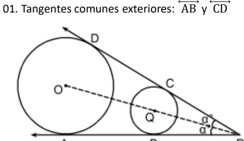
02. Si $\overline{AB}$ es diámetro y P es un punto cualquiera de la semicircunferencia, entonces:



$m\angle APB = x = 90$

Tangentes comunes a dos circunferencias

01. Tangentes comunes exteriores: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$

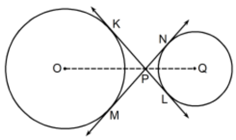


$AB = CD$

O, Q y P son colineales.

TEOREMAS FUNDAMENTALES

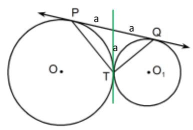
02. Tangentes comunes interiores: $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{KL}$



$\boxed{MN = KL}$

O, P y Q son colineales.

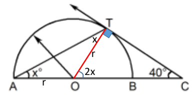
Consecuencia:



$\boxed{m\angle PTQ = 90}$

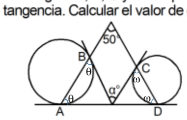
TEOREMAS FUNDAMENTALES

En el gráfico T es punto de tangencia, calcular el valor de x.



A) 20 B) 25 C) 30
D) 40 E) 45

En la figura A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcular el valor de α.

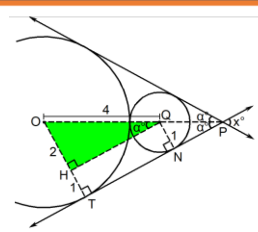


A) 65 B) 40 C) 80
D) 100 E) 25

TEOREMAS FUNDAMENTALES

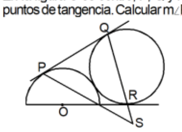
Se tienen dos circunferencias tangentes exteriores cuyos radios miden 1 y 3. Calcular la medida del ángulo que forman las tangentes comunes exteriores.

A) 30 B) 45 C) 53
D) 60 E) 90

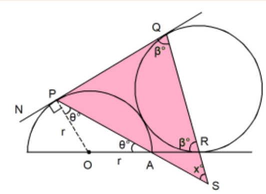


TEOREMAS FUNDAMENTALES

En la figura O es centro, P, Q y R son puntos de tangencia. Calcular m∠PSQ.



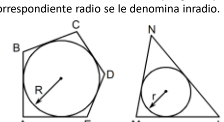
A) 30 B) 45 C) 60
D) 36 E) 53



CIRCUNFERENCIA Y POLÍGONOS

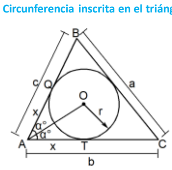
Polígono circunscrito

Un polígono está circunscrito a una circunferencia, si cada lado del polígono es tangente a la circunferencia. En este caso se dice que la circunferencia esta inscrita en el polígono, y a su correspondiente radio se le denomina inradio.



En la figura se muestran un pentágono y un triangulo circunscritos, "R" y "r" son los inradios correspondientes.

Circunferencia inscrita en el triángulo



O: Incentro

r: inradio

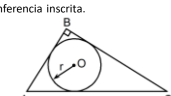
$\boxed{x = p - a}$

Donde: p = Semiperímetro del ΔABC

CIRCUNFERENCIA Y POLÍGONOS

Teorema de Poncelet

En todo triángulo rectángulo la suma de las longitudes de los catetos es igual a la suma de las longitudes de la hipotenusa y el diámetro de la circunferencia inscrita.



$\boxed{AB + BC = AC + 2r}$

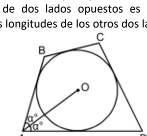
$AC + AB + BC = AC + 2r + AC$

$2p = 2AC + 2r$

$\therefore p = AC + r$

Cuadrilátero circunscrito

En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia se cumple que la suma de las longitudes de dos lados opuestos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados.

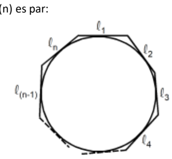


$\boxed{AB + CD = BC + AD}$

CIRCUNFERENCIA Y POLÍGONOS

Generalización del teorema de Pithot

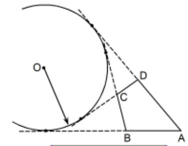
Para todo polígono circunscrito cuyo número de lados (n) es par:



$$\ell_1 + \ell_3 + \cdots + \ell_{n-1} = \ell_2 + \ell_4 + \cdots + \ell_n$$

Cuadrilátero exinscrito

Un cuadrilátero se dice que está ex-inscrito a una circunferencia, si las prolongaciones de sus cuatro lados son tangentes a dicha circunferencia.



$$AB - CD = AD - BC$$

Teorema de Steiner

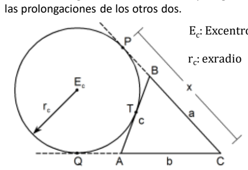
CIRCUNFERENCIA Y POLÍGONOS

Circunferencia ex-inscrita a un triángulo

Es aquella circunferencia tangente a uno de los lados del triángulo, al cual es relativa, y tangente a las prolongaciones de los otros dos.

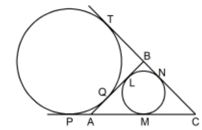
E_c: Excentro

r_c: exradio



$$x = \frac{a+b+c}{2}$$

Propiedad



$$PA = BN$$

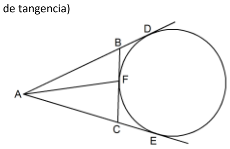
$$QL = AC - BC$$

$$TN = PM = AB$$

CIRCUNFERENCIA Y POLÍGONOS

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

01. Si el perímetro del triángulo ABF es 8, calcular el perímetro del triángulo ACF. (D, E y F son puntos de tangencia)



A) 4 B) 5 C) 6
D) 9 E) 8

Resolución:

Rpta. E

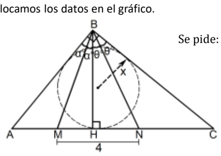
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

02. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$ y las bisectrices $\overline{BM}$ y $\overline{BN}$ de los ángulos ABH y BHC (M y N en $\overline{AC}$). Si MN=4, calcular el inradio del triángulo ABC.

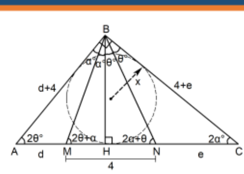
A) 40 B) 3 C) 2
D) 1 E) 1,5

Resolución:

Colocamos los datos en el gráfico.



Se pide: x



Por teorema de Poncelet:

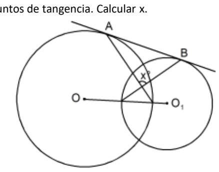
$$(d+4) + (4+e) = (d+4+e) + 2(x)$$

$$\therefore x = 2$$

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

03. En el gráfico O y O_1 son centros; A y B son puntos de tangencia. Calcular x.



A) 100 B) 120 C) 90
D) 75 E) 105

Resolución:

$\therefore x = 90$ Rpta. C

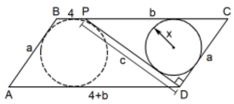
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

04. En el paralelogramo ABCD se ubica en $\overline{BC}$ el punto P, tal que m∠PDC=90 y BP=4. Si el cuadrilátero ABPD es circunscriptible, calcular la medida del inradio del triángulo CDP.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 8

Resolución:

Se pide: x



En el □ABPD: $a + c = 4 + (4 + b)$

En el ΔPDC: $a + c = b + 2(x)$

$\rightarrow b + 2x = 8 + b$

$\therefore x = 4$

Rpta. C

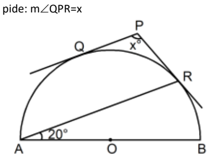
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

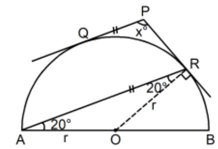
05. Por un punto P exterior a una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se trazan las tangentes $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ tal que $\overline{PQ} \parallel \overline{AR}$. Si m∠BAR=20, calcular m∠QPR.

A) 80 B) 90 C) 110
D) 130 E) 70

Resolución:

Se pide: m∠QPR=x





Por ángulos entre paralelas:

$x = 20 + 90$

$\therefore x = 110$

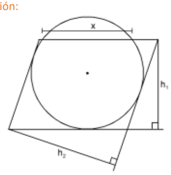
Rpta. C

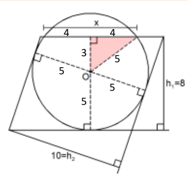
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

06. Una circunferencia es tangente a tres lados de un romboide cuyas alturas miden 8 y 10. Calcular la medida de la cuerda determinada en la circunferencia por el cuarto lado.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución:



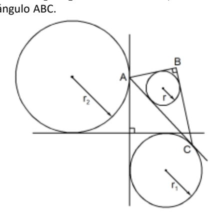


$\therefore x = 8$

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

07. Si $r + r_1 + r_2 = 20$, calcular el perímetro del triángulo ABC.



A) 20 B) 30 C) 40
D) 60 E) 80

Resolución:

AC=r_2+r_1

AC+AB+BC=AC+2r+AC

Perímetro=2AC+2r

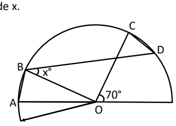
Perímetro=2r_2+2r_1+2r

Perímetro=40

Rpta. C

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

08. En la figura : O es centro y AB=CD. Calcular el valor de x.



A) 35 B) 40 C) 50
D) 55 E) 70

Resolución:

Rpta. A

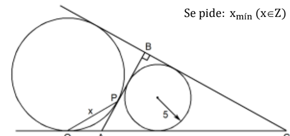
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

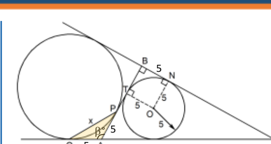
09. En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{AB}$ es tangente en P y Q a $\overline{AB}$ y a la prolongación de $\overline{CA}$. Calcular el menor valor entero de PQ, si el inradio del triángulo ABC mide 5.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución:

Se pide: $x_{mín}$ (x∈Z)





En ΔQAP: $\beta > 90 \rightarrow x > 5\sqrt{2}$

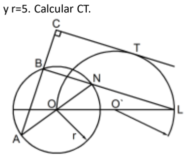
$\rightarrow x > 7{,}05$ ...

$\therefore x_{mín} = 8$

Rpta. D

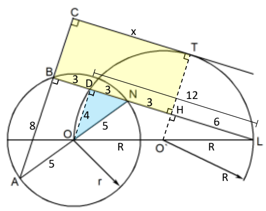
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

10. En la figura T es punto de tangencia, AB=8, BL=15 y r=5. Calcular CT.



A) 8 B) 9 C) 8,5
D) 9,5 E) 10

Resolución:

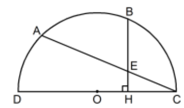


$\therefore x = 9$

Rpta. B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

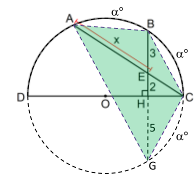
11. En el gráfico: O es centro, $\widehat{AB} \cong \widehat{BC}$, BE=3 y EH=2. Calcular AE.



A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 7,5

Resolución:

Completamos la circunferencia y prolongamos $\overline{BH}$ hasta cortar a la circunferencia en el punto G, luego:



Del gráfico: $BH = HG = 5$ y $m\widehat{BC} = m\widehat{CG} = \alpha$

Luego: $\overline{BC} \parallel \overline{AG}$ $(m\widehat{AB} = m\widehat{CG} = \alpha)$

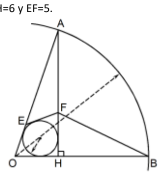
Finalmente el trapecio ABCG es isósceles.

$\therefore x = 7$

Rpta. B

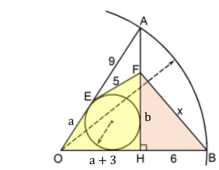
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

12. En la figura la circunferencia de radio r, está inscrita en el cuadrilátero OEFH. Calcular BF, si AE=9, BH=6 y EF=5.



A) 9 B) 8 C) 71
D) 8,5 E) 10

Resolución:



Sea $OE = a \rightarrow OH = a + 3$

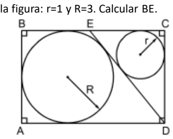
Por Pithot: $a + b = 5 + (a + 3) \rightarrow b = 8$

En triángulo FHB:

$\therefore x = 10$ Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

13. En la figura: r=1 y R=3. Calcular BE.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

14. Calcular la medida del ángulo ABC de un triángulo ABC, tal que la suma de los exradios del triángulo relativos a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ con la longitud de $\overline{AC}$ están en la razón de 4 a 3.

A) 74 B) 106 C) 60
D) 123 E) 147

Resolución:

Colocamos los datos en el gráfico.

Rpta: B

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

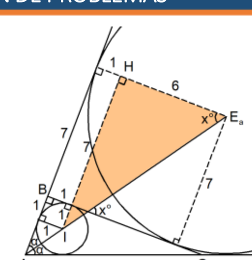
15. El inradio de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, mide 1 y el exradio relativo a $\overline{BC}$ mide 7. Calcular la medida del ángulo que forman $\overline{IE_a}$ con $\overline{BC}$.

I: incentro; E_a: excentro relativo a $\overline{BC}$

A) 53 B) 37 C) 60
D)4,5 E) 75

Resolución:

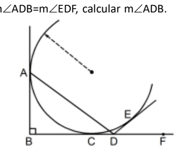
Colocamos los datos en el gráfico.



En el triángulo IHE_a: $x = 53$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

16. En la figura: A, C y E son puntos de tangencia. Si la m∠ADB=m∠EDF, calcular m∠ADB.



A) 26,5 B) 37 C) 30
D) 36 E) 22,5

Resolución:

$\therefore x = 37$ **Rpta. B**

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

17. En un cuadrilátero ABCD: m∠A=m∠B=m∠ACD=90, las medidas de los inradios inscritos en los triángulos ABC y ACD suman 8 con AD. Calcular el perímetro del cuadrilátero ABCD.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 16

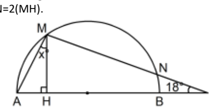
Resolución:

Colocamos los datos en el gráfico.

Rpta. E

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

18. Del gráfico, calcular el valor de x, si MN=2(MH).



A) 24 B) 22 C) 32
D) 36 E) 27

Resolución:

Rpta. E

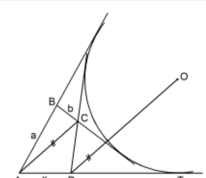
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

19. El cuadrilátero convexo ABCD es exinscrito a una circunferencia de centro O, las prolongaciones de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$ y $\overline{AD}$ son tangentes a la circunferencia. Si $\overline{AC} \parallel \overline{DO}$, AB=a u y BC=b u, entonces AD (en u) es:

A) a+b B) $\frac{a+b}{4}$ C) $\frac{a+b}{3}$
D) $\frac{a+b}{2}$ E) 2(a-b)

Resolución:

Colocamos los datos en el gráfico.



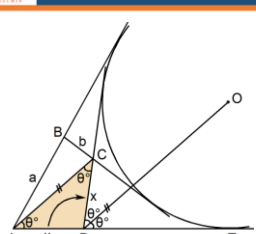
Se observa que $\overline{DO}$ es bisectriz, luego:

$$m\angle CDO = m\angle ODT = \theta$$

Por dato $\overline{AC} \parallel \overline{DO}$, entonces:

$$m\angle ACD = m\angle CAD = \theta$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



Luego el triángulo ADC es isósceles, entonces:

$$AD = x = DC$$

Finalmente, por teorema de Steiner:

$$a - x = x - b$$

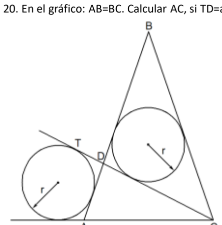
$$a + b = 2x$$

$$\therefore x = \frac{a+b}{2}$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

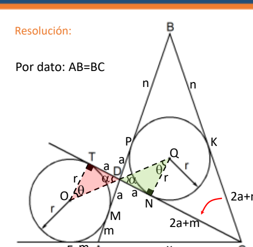
20. En el gráfico: AB=BC. Calcular AC, si TD=a.



A) 2a B) 3a C) 4a
D) a/2 E) 8a

Resolución:

Por dato: AB=BC



En C: x+m=a+a+2a+m

$\therefore x = 4a$ Rpta: C